微 积 分 发 展 史

微积分的创立与解析几何的发明一起，标志着文艺复兴后欧洲近代数学的兴起。

解析几何是代数与几何相结合的产物，它将变量引进了数学，使运动与变化的定量表述成为可能，从而为微积分的创立搭起了舞台。

微积分的思想萌芽，特别是积分学，部分可以追溯到古代。我们已经知道，面积和体积的计算自古以来一直是数学家们感兴趣的课题，在古代希腊、中国和印度数学家们的著述中，不乏用无穷小过程计算特殊形状的面积、体积和曲线长的例子。前面已经介绍过阿基米德、刘徽和祖冲之父子等人的方法，他们的工作，确实是人们建立一般积分学的漫长努力的先驱。

与积分学相比而言，微分学的起源则要晚得多。刺激微分学发展的主要科学问题是求曲线的切线、求瞬时变化率以及求函数的极大极小值等问题。

古希腊学者曾进行过作曲线切线的尝试，如阿基米德《论螺线》中给出过确定螺线在给定点处的切线的方法；阿波罗尼奥斯《圆锥曲线论》中讨论过圆锥曲线的切线，等等。但所有这些都是基于静态的观点

古代与中世纪中国学者在天文历法研究中曾涉及到天体运动的不均匀性及有关的极大、极小值问题，如郭守敬《按时历》中求“月离迟疾”(月亮运行的最快点和最慢点)、求月亮白赤道交点与黄赤道交点距离的极值(郭守敬甚至称之为“极数”)等问题，但东方学者以惯用的数值手段(“招差术”，即有限差分计算)来处理，从而回避了连续变化率。

总之，在17世纪以前，真正意义上的微分学研究的例子可以说是很罕见的。

一、微积分的酝酿

近代微积分的酝酿，主要是在 17 世纪上半叶这半个世纪。

为了理解这一酝酿的背景，我们首先来赂微回顾一下这一时期自然科学的一般形势和天文、力学等领域发生的重大事件。 首先是 1608 年，荷兰眼镜制造商里帕席发明了望远镜，不久伽利略将他制成的第一架天文望远镜对准星空而作出了令世人惊奇不已的天文发现。望远镜的发明不仅引起了天文学的新高涨，而且推动了光学的研究。

1619 年，开普勒公布了他的最后一条行星运动定律。开普勒行星运动三大定律要意是：

1 。行星运动的轨道是椭圆，太阳位于该椭圆的一个焦点；

2 。由太阳到行星的矢径在相等的时间内扫过的面积相等；

3 。行星绕太阳公转周期的平方，与其椭圆轨道的半长轴的立方成正比。

开普勒主要是通过观测归纳出这三条定律从数学上推证开普勒的经验定律，成为当时自然科学的中心课题之一。

1638年，伽利略的《关于两门新科学的对话》出版。伽利略建立了自由落体定律、动量定律等，为动力学奠定了基础；他认识到弹道的抛物线性质，并断言炮弹的最大射程应在发射角为45度时达到，等等。伽利略本人竭力倡导自然科学的数学化，他的著作激起了人们对他所确立的动力学概念与定律作精确的数学表述的巨大热情。

凡此一切，标志着自文艺复兴以来在资本主义生产力刺激下蓬勃发展的自然科学开始迈入综合与突破的阶段，而这种综合与突破所面临的数学困难，使微分学的基本问题空前地成为人们关注的焦点。

当时，人们主要集中的焦点有：非匀速运动物体的速度与加速度使瞬时变化率问题的研究成为当务之急；望远镜的光程设计需要确定透镜曲面上任一点的法线，这又使求任意曲线的切线问题变得不可回避；确定炮弹的最大射程及寻求行星轨道的近日点与远日点等涉及的函数极大值、极小值问题也亟待解决。

与此同时，行星沿轨道运动的路程、行星矢径扫过的面积以及物体重心与引力的计算等又使积分学的基本问题——面积、体积、曲线长、重心和引力计算的兴趣被重新激发起来。

在 17 世纪上半叶，几乎所有的科学大师都致力于寻求解决这些难题的新的数学工具，特别是描述运动与变化的无限小算法，并且在相当短的时期内，取得了迅速的进展。

代表性的工作有：

1 、开普勒与旋转体体积；

开普勒方法的要旨，是用无数个同维无限小元素之和来确定曲边形的面积及旋转体的体积。例如他认为球的体积是天数个小圆锥的体积的和，这些圆锥的顶点在球心，底面则是球面的一部分；他又把圆锥看成是极薄的圆盘之和，并由此计算出它的体积，然后进一步证明球的体积是半径乘以球面面积的三分之一。

2、卡瓦列里不可分量原理

他在《用新方法促进的连续不可分量的几何学》中发展了系统的不可分量方法。认为线是由无限多个点组成；面是由无限多条平行线段组成；立体则是由无限多个平行平面组成。他分别把这些元素叫做线、面和体的“不可分量”。

卡瓦列里利用这条原理计算出许多立体图形的体积，他对积分学创立最重要的贡献还在于在1639利用平固下的不可分量原理建立了等价于下列积分式子：

$$\int_0^a x^n dx = \frac{a^{n+1}}{n+1}$$

3、笛卡儿的“圆法”

笛卡儿的这种代数方法在推动微积分的早期发展方面有很大的影响，牛顿就是以笛卡儿圆法为起跑点而踏上研究微积分的道路的。

笛卡儿圆法在确定重根时会导致极繁复的代数计算，1658年荷兰数学家胡德提出了一套构造曲线切线的形式法则，称为“胡德法则”。胡德法则为确定笛卡儿圆法所需的重根提供了机械的算法，可以完成求任何代数曲线的切线斜率时所要进行的计算。

4、费马求极大值和极小值方法

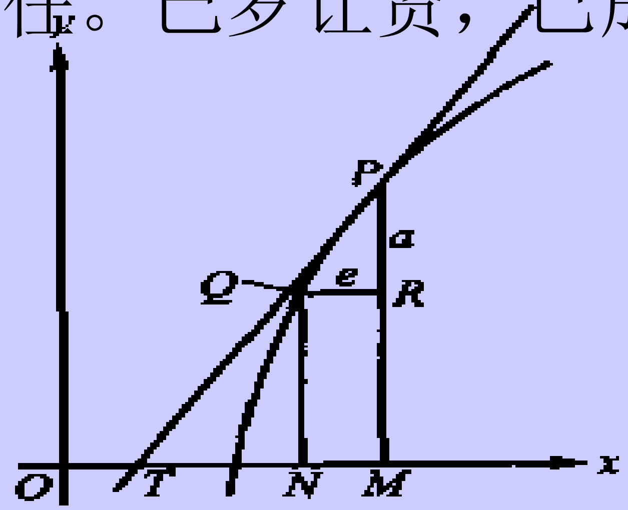
按费马的方法。设函数 f(x) 在点 a 处取极值，费弓用“ a+e”代替原来的未知量 a， 并使 f(a+e) 与 f(a) 逼近，即：

$$f(a+e) \sim f(a)$$

这里所提到的“ e”就是后来微积分学当中的“ Δx ”

5、巴罗的“微分三角形”

巴罗是牛顿的老师。是英国剑桥大学第一任“卢卡斯数学教授”，也是英国皇家学会的首批会员。当巴罗发现和认识到牛顿的杰出才能时，便于 1669 年辞去了卢卡斯教授的职位，举荐自己的学生——当时才 27 岁的牛顿来担任。巴罗让贤，已成为科学史上的佳话。



6、沃利斯的“无穷算术”

沃利斯另“一项重要的研究是计算四分之一单位圆的面积，并由此得到 π 的无穷乘积表达式。并有以下猜想：

$$\int_0^a x^{p/q}\,\mathrm{d}x = \frac{a^{(p/q)+1}}{(p/q)+1} = \frac{q}{p+q}a^{(p+q)/q},$$

二、牛顿的“流数术”

牛顿于 1661 年入剑桥大学三一学院，受教于巴罗，同时钻研伽利略、开普勒、笛卡儿和沃利斯等人的著作。三一学院至今还保存着牛顿的读书笔记，从这些笔记可以看出，就数学思想的形成而言，笛卡儿的《几何学》和沃利斯的《无穷算术》对他影响最深，正是这两部著作引导牛顿走上了创立微积分之路。

1665 年 8 月，剑桥大学因瘟疫流行而关闭，牛顿离校返乡，随后在家乡躲避瘟疫的两年，竟成为牛顿科学生涯中的黄金岁月。制定微积分，发现万有引力和颜色理论，……，可以说牛顿一生大多数科学创造的蓝图，都是在这两年描绘的。

1、流数术的初建

牛顿对微积分问题的研究始于 1664 年秋，当时他反复阅读笛卡儿《几何学》，对笛卡儿求切线的“圆法”发生兴趣并试图寻找更好的方法。就在此时，牛顿首创了小 o 记号表示 x 的无限小且最终趋于零的增量。

1665 年夏至 1667 年春，牛顿在家乡躲避瘟疫期间，继续探讨微积分并取得了突破性进展。据他自述，1665 年 11 月发明“正流数术”（微分法），次年 5 月又建立了”反流数术”（积分法）。1666 年 10 月，牛顿将前两年的研究成果整理成一篇总结性论文，此文现以《流数简论》著称，《流数简论》是历史上第一篇系统的微积分文献。

2、流数术的发展

《流数简论》标志着微积分的诞生，但它在许多方面是不成熟的。牛顿于 1667 年春天回到剑桥，对自己的微积分发现未作宣扬。他在这一年 10 月当选为三一学院成员，次年又获硕士学位，并不是因为他在微积分方面的工作，而是因为在望远镜制作方面的员献。但从那时起直到 1693 年大约四分之一世纪的时间里，牛顿始终不渝努力改进、完善自己的微积分学说，先后写成了三篇微积分论文，它们分别是：

(1)1669 年的《运用无限多项方程的分析》 ；

(2) 1671 年的《流数法与无穷级数》；

(3) 1691 年的《曲线求积术》。

牛顿微积分学说最早的公开表述出现在 1687 年出版的力学名著《自然哲学的数学原理》之中。因此《原理》也成为数学史上的划时代著作。

《原理》在创导首末比方法的同时保留了无限小瞬，这种做法常常被认为自相矛盾而引起争议。实际上，在牛顿的时代，建立微积分严格基础的时机尚不成熟，在这样的条件下，牛顿在大胆创造新算法的同时，坚持对微积分基础给出不同解释，说明了他对微积分基础所存在的困难的深邃洞察和谨慎态度。

《原理》被爱因斯坦盛赞为“无比辉煌的演绎成就”。全书从三条基本的力学定律出发，运用微积分工具，严格地推导证明了包括开普勒行星运动三大定律、万有引力定律等在内的一系列结论，并且还将微积分应用于流体运动、声、光、潮汐、彗星乃至宇宙体系，充分显示了这一新数学工具的威力。

《原理》中的微积分命题虽然都采用了几何形式来叙述、证明，但正如牛顿本人后来解释的那样：发现原理中的绝大多救命题是依靠使用了“新分析法”，然后再“综合地证明”。事实上， 1664 年参加巴罗主考的三一学院津贴生考试时，因欧氏几何成绩不佳差一点未能通过。

三、莱布尼茨的微积分

在微积分的创立上，牛顿与莱布尼茨分享荣誉。

莱布尼茨 (1646——1716) 出生于德国莱比锡一个教授家庭，早年在莱比锡大学学习法律，同时开始接触伽利略、开普勒、笛卡儿、帕斯卡以及巴罗等人的科学思。 1667 年获阿尔持多夫大学法学博士学位，次年开始为缅因茨选帝侯服务，不久被派往巴黎任大使。莱布尼茨在巴黎居留了四年 [1672—1676) ，这四年对他整个科学生涯的意义，可以与牛顿在家乡躲避瘟疫的两年类比，莱布尼茨许多重大的成就包括创立微积分都是在这一时期完成或奠定了基础。

1 、特征三角形

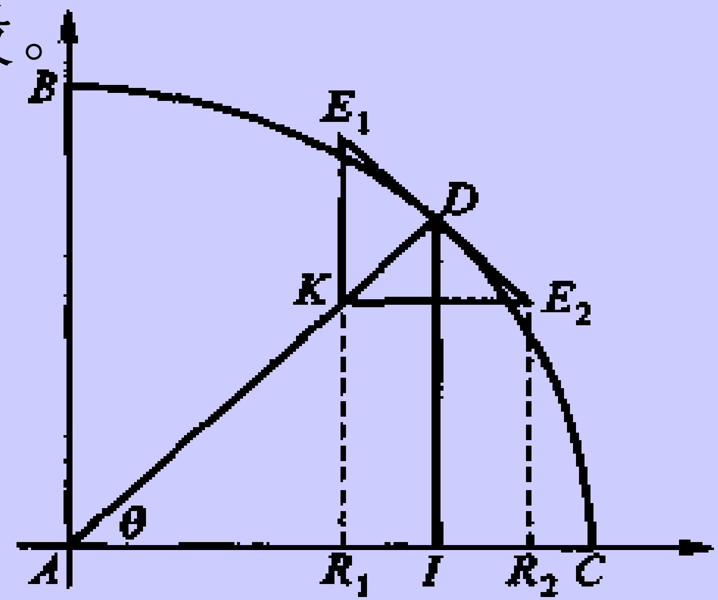
莱布尼茨在巴黎与荷兰效学家、物理学家惠更斯的结识、交往，激发了他对数学的兴趣．他通过卡瓦列里、帕斯卡、巴罗等人的著作，了解并开始研究求曲线的切线以及求面积、体积等微积分问题．

与牛顿流数论的运动学背景不同，莱布尼茨创立微积分首先是出于几何问题的思考，尤其是特征三角形的研究．特征三角形，也称“微分三角形”，在巴罗的著作中已经出现．帕斯卡在特殊情形下也使用过这种三角形．莱布尼茨在1673 年提出了他自己的特征三角形．

帕斯卡的“例子”是下述的命题：

“圆的一个象限的任何孤的正弦之和，等于界于两端的两个正弦之间的底线段乘以半径.”

这里“正弦”是指纵坐标，而在所说的相中，每个纵坐标都要乘以相应的圆的无限小弧而不是乘以底的无限小段。



从而得到一下结果：

$$\int y\,ds = \int r\,dx \ ,$$

即有：

$$\int 2\pi y\,ds = 2\pi\int r\,dx = 2\pi r^2,$$

2、分析微积分的建立

早在 1666 年，莱布尼茨在《组合艺术》一书中讨论过数列问题并得到许多重要结论。

莱布尼茨后来做了大量工作，艰难地前进，从一串离散值过渡到任意函数 y 的增量. 在 1675 年 10 月 29 日的一份手稿中，他决定用符号 $\int$ 代替 omn.，$\int$ 显然是"sum"的首字母 s 的拉长. 稍后，在 11 月 11 日的手稿中，莱布尼茨又引进了记号 dx 表示两相邻 x 的值的差，并探索 $\int$ 运算与 d 运算的关系. 无论如何，到 1676 年 11 月，莱布尼茨已经能够给出幂函数的微分与积分公式：

$$dx^e = ex^{e-1}dx,$$

和

$$\int x^e dx = \frac{x^{e+1}}{e+1}.$$

1684 年莱布尼茨发表了他的第一篇微分学论文《一种求极大与极小值和求切线的新方法》，刊登在《教师学报》上，这也是数学史上第一篇正式发表的微积分文献．该文是莱布尼茨对自己 1673 年以来微分学研究的概括，其中定义了微分并广泛采用了微分记号 dx， dy。莱布尼茨假设横坐标 x 的微分 dx 是任意的量，纵坐标 y 的微分 dy 就定义为它与 dx 之比等于纵坐标与次切距之比的那个量。

《新方法》中明确陈述了莱布尼茨 1677 年已得到的函数和、差、积、商、乘幂与方根的微分公式：

$$d(z - y + w + x) = dz - dy + dw + dx,$$

$$d(xv) = x\,dv + v\,dx,$$

$$d\left(\frac{v}{y}\right) = \frac{y\,dv - v\,dy}{y^2},$$

$$dx^a = a x^{a-1} dx,$$

$$d\sqrt[b]{x^a} = \frac{a}{b}\sqrt[b]{x^{a-b}}\,dx.$$

1686 年，莱布尼茨又发表了他的第一篇积分学论文《深奥的几何与不可分量及无限的分析》。这篇论文初步论述了积分或求积问题与微分或切线问题的互逆关系。

莱布尼茨分析道：‘‘研究不定求积或其不可能性的方法，对我来说不过是我称之为反切线方法的更广泛的问题的特殊情形 (并且事实上是比较容易的情形)，而这种反切线方法包括了整个超越几何的绝大部分．”